Системы с трехдиагональной матрицей. Метод прогонки

Теорема. Система с диагональным преобладанием всегда разрешима и притом единственным образом.

Док-во. Рассм. соотв. однород. систему: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$, $1 \le j \le n$

Пусть имеет нетривиальное решение $\bar{x}_j$, наиб. по модулю компонента соотв. индексу k ($|\bar{x}_k| \ge |x_j|$, $1 \le j \le n$)

Запишем k уравнение системы в виде $a_{kk} \bar{x}_k = -\sum_{j \ne k}^{n} a_{kj} \bar{x}_j$

$\Rightarrow |a_{kk}||\bar{x}_k| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}||\bar{x}_j| \le |\bar{x}_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}|$. Т.к. $|x_k| \ne 0$, то ?!

$$A_i x_{i-1} + C_i x_i + B_i x_{i+1} = F_i, \quad i = \overline{1, n-1} \qquad (1)$$

$$x_0 = q_0, \quad x_n = q_n$$

A_i, C_i, B_i, F_i вместе с q_0 и q_n известны.

$$\begin{cases} C_1 x_1 + B_1 x_2 = F_1 - A_1 q_0 \\ A_2 x_1 + C_2 x_2 + B_2 x_3 = F_2 \\ \dots \\ A_{n-1} x_{n-2} + C_{n-1} x_{n-1} = F_{n-1} - B_{n-1} q_n \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & n-1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} C_1 & B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_2 & C_2 & B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & C_3 & B_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1} & C_{n-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

Пусть $x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}$, $0 \le i \le n-1$. Тогда:

$x_{i-1} = \alpha_i x_i + \beta_i = \alpha_i \alpha_{i+1} x_{i+1} + \alpha_i \beta_{i+1} + \beta_i$. Подставим в (1):

$(A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + C_i \alpha_{i+1} + B_i) x_{i+1} + A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + C_i \beta_{i+1} - F_i = 0$, $i = \overline{1, \dots, n-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + C_i \alpha_{i+1} + B_i = 0 \\ A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + C_i \beta_{i+1} - F_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_{i+1} = \frac{-B_i}{A_i \alpha_i + C_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i \beta_i}{A_i \alpha_i + C_i}$$

Из $x_0 = q_0$, $\Rightarrow \alpha_1 = 0$, $\beta_1 = q_0$, из которых находим все остальные. Далее, из $x_n = q_n$ находим все x_i

Сложность $O(n)$

Во многих задачах $|C_i| > |A_i| + |B_i|$ (2)

Лемма. Если для сист. с трехдиаг. матрицей выполняется (2), то $|\alpha_i| \le 1$

Док-во (по индукции) $\alpha_1 = 0$. $|\alpha_{i+1}| = \left| \frac{B_i}{C_i + A_i \alpha_i} \right| \le \left| \frac{B_i}{|C_i| - |A_i|} \right| \le 1$, чтд

Предположим, что компонента реш. x_i с ошибкой. Тогда при вычисл. след. компоненты x_{i-1} эта ошибка не будет нарастать.

Обусловленность систем лин. алгебраич. уравнений

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \qquad [\ \|x\| = \sqrt{(x,x)}\ ]$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Корректная математ. задача по Адамару:

1) Решение задачи $\exists$; 2) решение единственное

3) Решение непрерывно зависит от входных данных.

$$Ax = f\ ;\ f = \{f_1, \dots, f_n\} \in E_n$$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то $\exists A^{-1}$: $x = A^{-1} f$

$\tilde{f} = f + \delta f \Rightarrow A\tilde{x} = \tilde{f}$ (возмущение)

$\tilde{x} = A^{-1}\tilde{f} = A^{-1}f + A^{-1}\delta f = x + \delta x$, где $\delta x = A^{-1}\delta f$ (1)

$\Rightarrow \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta f\| \Rightarrow \|\delta x\| \xrightarrow[\|\delta f\| \to 0]{} 0 \Rightarrow$ корректная задача.

$\|f\| \leq \|A\| \|x\|$. Сначала перемножим с (1):

$$\|f\| \cdot \|\delta x\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|x\| \cdot \|\delta f\|$$

Пусть $f \neq \bar{0} \Rightarrow x \neq \bar{0}$, тогда $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq M_A \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}$ (относит. погрешность)

Для M_A справедливо: $M_A \geq |\lambda_{max}| / |\lambda_{min}|$ (по модулю)

Пусть y - собств. вектор, отв. λ_{max}:

$$Ay = \lambda_{max} y \Rightarrow |\lambda_{max}|\, \|y\| = \|Ay\| \leq \|A\| \cdot \|y\| \Rightarrow |\lambda_{max}| \leq \|A\|$$

Пусть z - собств. вектор, отв. λ_{min}:

$$Az = \lambda_{min} z \Rightarrow A^{-1} z = \frac{1}{\lambda_{min}} z \Rightarrow \frac{1}{|\lambda_{min}|} \leq \|A^{-1}\|$$

$\Rightarrow$ 1) $M_A \geq 1$

2) M_A тем больше, чем больше разброс характер. чисел матрицы.

$\Rightarrow$ Чем больше матрица, тем она имеет тенденцию к худш. M_A.

Каноническая форма одношаговых итерационных методов. Достаточное условие сходимости (теорема Самарского)

При плохо обусл. матрице A могут существенно отклонения вызванного или нарушит возмущением правой части. Этого недостатка лишены итерационные методы решения СЛАУ. $x_k = \{x_1^k, \dots, x_n^k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$

Сходимость означает $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k - x\| = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{(x_1^k-x_1)^2+\dots+(x_n^k-x_n)^2} = 0$

Необход. и достаточное условие: $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i$, $i=\overline{1,n}$.

Стандартная каноническая форма: $B_{k+1}\dfrac{x_{k+1}-x_k}{\tau_{k+1}} + Ax_k = f$, $|B_{k+1}|\ne 0$, $\tau_{k+1}>0$ (1)

Стационарный процесс, если B_{k+1} и τ_{k+1} не меняются

$\Rightarrow B_{k+1}x_{k+1} = (B_{k+1} - \tau_{k+1}A)x_k + \tau_{k+1} f$

Следует выбирать B_{k+1} простыми, т.к. надо многократно решать.

Проблема сходимости: $z_k = x_k - x$ — погрешность решения

$\psi_k = Ax_k - f$ — невязка

$\psi_k = Ax_k - f = A(z_k + x) - f = Az_k \Rightarrow z_k = A^{-1}\psi_k$

$\Rightarrow \|\psi_k\| \le \|A\|\|z_k\|$; $\|z_k\|\le\|A^{-1}\|\cdot\|\psi_k\| \Rightarrow \|z_k\| \xrightarrow[\|\psi_k\|\to 0]{} 0$

а) все собственные значения самосопряженного л.о. вещественны

б) самосопр. лин. преобраз. всегда имеет полный набор л.н. собств. векторов, из которых можно образов. ортонорм. базис. В этом базисе $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Лемма 1 Для того, чтобы симметричная ($A=A^*$) матрица была положительно определенной, необход. и достаточно, чтобы все её характеристические числа были >0.

Док-во ($\Rightarrow$) e_1 - собств. вектор $\Rightarrow (Ae_1,e_1) = \lambda_1 > 0$, что

($\Leftarrow$) $\lambda_1 \ge \dots \ge \lambda_n > 0$, $\forall x$: $(Ax,x) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i q_i^2 > 0$ $\forall \{q_1,\dots,q_n\} = x \Rightarrow A>0$

Лемма 2 Пусть $A=A^*>0$ и $\lambda_1\ge\dots\ge\lambda_n>0$, тогда $\lambda_n\|x\|^2 \le (Ax,x)\le\lambda_1\|x\|^2$

Лемма 3 Если $A>0$, то $\exists\,\delta>0$: $(Ax,x)\ge\delta\|x\|^2$, $\forall x\in E_n$

Док-во Если $A=A^*$, то $\delta=\lambda_n$. В общ. случае $\bar A = \dfrac{A+A^*}{2} = \bar A^*$:

$(Ax,x) = (A^*x,x) = (\bar A x,x) > 0$, где $\bar A=\bar A^* \Rightarrow (Ax,x) = (\bar Ax,x)\ge\bar\lambda_n\|x\|^2$, чтд.

Пусть B и τ не зависят от k. Тогда

Теорема Пусть $A=A^*>0$, $(B-\frac{\tau}{2}A)>0$, $\tau>0$. Тогда $\forall$ x_0 итерац. процесс (1) сходится к решению исходной системы.

$(B - \frac{\tau}{2}A) > 0 \Rightarrow (Bx, x) > \frac{\tau}{2}(Ax, x) \quad \forall x \in E_n,\ x \neq 0. \quad (\Rightarrow B > 0 \Downarrow |B| \neq 0)$

$0 < \tau < \tau_0 = \inf\limits_{x \neq 0} \frac{2(Bx,x)}{(Ax,x)}$.

$x_k = x + z_k$, подставим в (1): $B\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + Az_k = 0$

$\Rightarrow z_{k+1} = z_k - \tau B^{-1}Az_k = z_k - \tau\omega_k$, где $\omega_k = B^{-1}Az_k \Rightarrow Az_k = B\omega_k$

$Az_{k+1} = Az_k - \tau A\omega_k$

Рассм. послед. $J_k = (Az_k, z_k)$

$J_{k+1} = (Az_k - \tau A\omega_k, z_k - \tau\omega_k) = (Az_k, z_k) - \tau(A\omega_k, z_k) -$

$- \tau(Az_k, \omega_k) + \tau^2(A\omega_k, \omega_k)$

Имеем $(A\omega_k, z_k) \overset{A = A^*}{=} (Az_k, \omega_k) = (B\omega_k, \omega_k)$

$\Rightarrow J_{k+1} = J_k - 2\tau(B\omega_k, \omega_k) + \tau^2(A\omega_k, \omega_k) = J_k - 2\tau((B - \frac{\tau}{2}A)\omega_k, \omega_k)$

Т.к. $(B - \frac{\tau}{2}A) > 0$, то $J_k \geq J_{k+1} \geq \ldots \geq 0 \Rightarrow$ сходится

Согласно лемме 3: $((B - \frac{\tau}{2}A)\omega_k, \omega_k) \geq \delta\|\omega_k\|^2 \quad (\delta > 0)$

$\Rightarrow J_k - J_{k+1} = 2\tau((B - \frac{\tau}{2}A)\omega_k, \omega_k) \geq 2\tau\delta\|\omega_k\|^2$

Откуда следует, что $\|\omega_k\| \to 0$ при $k \to +\infty$.

Т.к. $z_k = A^{-1}B\omega_k$, то $\|z_k\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B\| \cdot \|\omega_k\| \to 0$, ч.т.д.

Метод простой итерации.

$B = E$, $\tau = const$.

$x_{k+1} = (E - \tau A)x_k + \tau f$

Пусть матрица A удовл. теореме Самарского $A = A^* > 0$

$\Rightarrow \tau_0 = \inf\limits_{x \neq 0} \frac{2(x,x)}{(Ax,x)} = \frac{2}{\sup\limits_{x \neq 0} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}} = \frac{2}{\sup\limits_{x \neq 0} \frac{\lambda_1\xi_1^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}} = \frac{2}{\lambda_1}$

$0 < \tau < \tau_0 = \frac{2}{\lambda_1}$

Пусть $S = I - \tau A$, $S = S^* \Rightarrow x_{k+1} = Sx_k + \tau f$

$z_k = x - x_k$: $z_{k+1} = Sz_k$

Лемма 1 Пусть оператор, который порождает матрица A, имеет собств. вектор e_i с собств. знач. λ_i. Тогда оператор, пораждающий S, так же имеет собств. вектор e_i но с собств. значением $\mu_i(\tau) = 1 - \tau\lambda_i$

Док-во $Se_i = (I - \tau A)e_i = (1-\tau\lambda_i)e_i = \mu_i e_i$, **чтд**

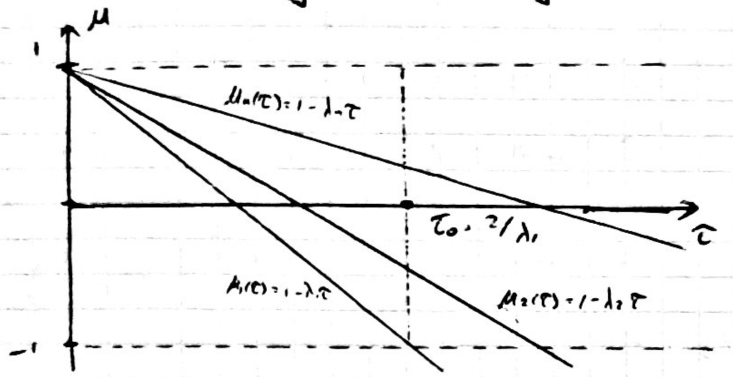
$\|S\| = \max\limits_{1\le i\le n} |\mu_i(\tau)|$

Лемма 2 Для схождения метода простой итерации $\forall$ x_0, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения оператора перехода S были по модулю меньше 1: $|\mu_i(\tau)| < 1$, $1 \le i \le n$.

Док-во $\Leftarrow$ $\|S\| < 1$ $\Rightarrow$ $\|z_{k+1}\| \le \|S\| \cdot \|z_k\| \le \ldots \le \|S\|^k \cdot \|z_0\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ (*)

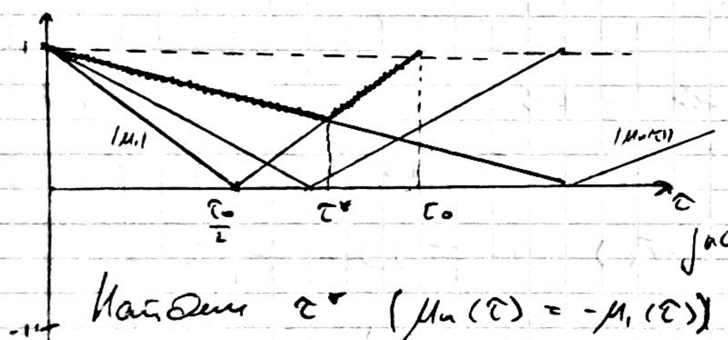
$\Rightarrow$ Пусть $\exists j$: $|\mu_j| \ge 1$. Выберем $x_0 = x + e_j$ (x – решение системы), тогда $z_0 = e_j$: $z_k = S^k e_j = \mu_j^k e_j$, $\|z_k\| = |\mu_j|^k \ge 1$ ($\Rightarrow \|z_k\| \not\to 0$, **чтд**)

Установим диапазон изменения τ:



$0 < \tau < \tau_0 = \dfrac{2}{\lambda_1}$ (<u>необх и дост. услов</u>)

Исследуем скорость сходимости метода.



Из (*) $\Rightarrow$ оценка погрешности показывает, что ~~скорость~~ сходимость убывает по закону геом. прогрессии со знаменателем $q(\tau) = \|S\| = \max\limits_{1\le j\le n} |\mu_j(\tau)|$

Найдем τ^* $(\mu_n(\tau) = -\mu_1(\tau)) \Rightarrow 1 - \tau\lambda_n = \tau\lambda_1 - 1$

$\Rightarrow \tau^* = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} < \tau_0$

$$\|S\| = \max_{1\le j\le n} |\mu_j(\tau)| = \begin{cases} \mu_n(\tau), & 0 < \tau \le \tau^* \\ -\mu_1(\tau), & \tau^* \le \tau < \tau_0 \end{cases}$$

$\min \|S\| = 1 - \tau_* \lambda_n = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} = \dfrac{M_A - 1}{M_A + 1}$ ($\Rightarrow$ при $M_A \gg 1$, $\min \|S\| \sim 1$)

Методы Зейделя и верхней релаксации.

Разложим $A = D + T_{\text{н}} + T_{\text{в}}$

Классический метод Зейделя: $B = D + T_{\text{н}}$, $\tau = 1$ $\Rightarrow$

$$(D + T_{\text{н}})(x_{k+1} - x_k) + Ax_k = f \Rightarrow (D + T_{\text{н}})x_{k+1} + T_{\text{в}} x_k = f$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} x_1^{k+1} + a_{12} x_2^{k} + a_{13} x_3^{k} + \ldots + a_{1n} x_n^{k} = f_1 \\ a_{21} x_1^{k+1} + a_{22} x_2^{k+1} + a_{23} x_3^{k} + \ldots + a_{2n} x_n^{k} = f_2 \\ \ldots \\ a_{n1} x_1^{k+1} + a_{n2} x_2^{k+1} + a_{n3} x_3^{k+1} + \ldots + a_{nn} x_n^{k+1} = f_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k} \right], \quad i = \overline{1,n}$$

$[a_{ii} \neq 0$, т.к. $A = A^* > 0]$

Метод верхней релаксации: (вводим параметр ω)

$$(D + \omega T_{\text{н}}) \frac{(x_{k+1} - x_k)}{\omega} + Ax_k = f \qquad [\tau = \omega > 0]; \ [\omega = 1 \Leftrightarrow \text{Зейдель}].$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\omega} D + T_{\text{н}}\right)(x_{k+1} - x_k) + Ax_k = f \ [\text{влияние } \omega \text{ на диагональ}]$$

$$\left(\frac{1}{\omega} D + T_{\text{н}}\right) x_{k+1} + \left[\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) D + T_{\text{в}}\right] x_k = f$$

$$\Rightarrow x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{k} \right), \quad i = \overline{1,n}$$

Условие сходимости: (A удовл. усл. теоремы Самарского)

$$A = A^* \Rightarrow T_{\text{н}}^* = T_{\text{в}}, \ T_{\text{в}}^* = T_{\text{н}} \Rightarrow (T_{\text{н}} x, x) = (T_{\text{н}}^* x, x) = (T_{\text{в}} x, x) \quad ⊛$$

$$B - \frac{\tau}{2} A = (D + \omega T_{\text{н}}) - \frac{\omega}{2}(D + T_{\text{н}} + T_{\text{в}}) = \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) D + \frac{\omega}{2}(T_{\text{н}} - T_{\text{в}})$$

Условие положит. определенности: $\left(\left(B - \frac{\tau}{2} A\right)x, x\right) = \left(1 - \frac{\omega}{2}\right)(Dx, x) > 0$

($\frac{\omega}{2}(T_{\text{н}} - T_{\text{в}})$ не дает вклада из-за ⊛.) $A > 0 \Rightarrow a_{ii} > 0 \Rightarrow D > 0$

$\Rightarrow 0 < \omega < 2$

Задача интерполирования. Интерполирование полиномами. Интерполяционная формула Лагранжа.

На $[a;b]$ определена некая функция $y=f(x)$. Известны лишь значения в конечном числе точек $x_0, x_1, \dots, x_n$ $(a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b)$.
Требуется по известным значениям $y_i = f(x_i)$ „восстановить" исходную функцию, т.е. построить ф-цию $F(x)$, достаточно близкую к $f(x)$.

Выберем некоторую систему функций $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$, задан. на $[a;b]$,
$F(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$, причем $F(x_j) = f(x_j)$, $j=\overline{0,n}$

Получим систему $\sum\limits_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x_j) = f(x_j)$, $j=\overline{0,n}$. (Решить при $n \gg 1$ оч. сложно)

Необход. и достаточно, чтобы
$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \ne 0$$
(Чебышевская система)

Пусть $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$, ..., $\varphi_n(x)=x^n$. $\Rightarrow F(x) = P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x_j^i = f(x_j)$, $j=\overline{0,n}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \quad \text{(опр. Ван-дер-Монда)} \ne 0$$

Интерполяционный полином в форме Лагранжа:

Пусть $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i) Q_{ni}(x)$, где $Q_{ni}(x)$ - полином ст. n:

$$Q_{ni}(x) = \begin{cases} 0, & x=x_j, \ \forall j \ne i \\ 1, & x=x_i \end{cases}$$

$$Q_{ni}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne i}}^{j=n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Погрешность интерполяционного многочлена в форме Лагранжа. Интерполяц. полином в форме Ньютона.

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, $x \in [a;b]$, $(R_n(x_i)=0)$

Пусть $f(x)$ имеет $(n+1)$ непрерывную производную на $[a;b]$

$R_n(x) = \omega_{n+1}(x) r_n(x)$, где $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)$

Зафиксируем $x \in [a;b]$: $g(t) = f(t) - P_n(t) - \omega_{n+1}(t) r_n(x)$

$(g(t)=0$ при $t = x_i$ и $t = x)$

$n+2$ нуля на $[a;b]$

По теореме Ролля, $g'(\delta)$ имеет по крайней мере $(n+1)$ нуль на $[a;b]$, ..., $g^{(n+1)}(\delta)$ обр. в 0 в некоторой точке $\delta=\xi\in[a,b]$, т.е. $g^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-\underbrace{P_n^{(n+1)}(\xi)}_{=0}-(n+1)!\,r_n(x)=0$

$\Rightarrow r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$; $\xi\in[a;b]$

$\Rightarrow |R_n(x)|\le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$, где $M_{n+1}=\max\limits_{x\in[a;b]}|f^{(n+1)}(x)|$

На $[x_0,x_n]$ имеет $n+1$ нуль ($\omega_{n+1}(x)$), его знач. между невелики.

В форме Ньютона: (Лагранж неудобен, при увеличении числа узлов приходится все пересчитывать заново)

$P_n(x)=P_0(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}(P_i(x)-P_{i-1}(x))$ [$P_i(x)$ - полином Лагранжа, соотв. узлам $x_0,\dots,x_i$. В частности, $P_0(x)=f(x_0)$]

$Q_i(x)=P_i(x)-P_{i-1}(x)$ имеет ст. i и обр. в ноль при $x=x_0,x_1,\dots,x_{i-1}$

$\Rightarrow Q_i(x)=A_i(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})$; $A_i=\sum\limits_{k=0}^{i}\dfrac{f(x_k)}{\omega_{ki}}$, где

совпадает с коэф. при x^i в $P_i(x)$

$\omega_{ki}=(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_i)$, $A_0=f(x_0)$.

$\Rightarrow P_n(x)=P_{n-1}(x)+A_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$

$\Rightarrow P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+\dots+A_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$

Увеличение узлов требует добавления одного доп. слагаемого.

Интерполирование кубическими сплайнами

Увеличение степени интерполяц. многочлена может оказаться невыгодным из-за быстрого роста объема вычислений.

$\Rightarrow$ Использовать полиномы меньшей степени (3, например)

$f(x)$ задана на $[a;b]$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$; $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$

Опр. Кубическим сплайном ф-ции $y=f(x)$ наз-ся функция $S(x)$:

1) на $\forall$ отрезке $[x_i,x_{i+1}]$ $S(x)$ является полиномом 3 степени.
2) $S(x)$, $S'(x)$ и $S''(x)$ непрерывны на $[a;b]$
3) $S(x_i)=f(x_i)=f_i$, $i=\overline{0,n}$

4) $S''(a) = S''(b) = 0$ (можно $S''(a) = A$, $S''(b) = B$)

<u>Теорема:</u> Существует единственный сплайн $S(x)$, удовл. 1)–4)

Сведем задачу построения к отысканию коэф-ов полин. 3 степени.

$S_i(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$: $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x-x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$\Rightarrow S_i'(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2$; $S_i''(x) = c_i + d_i(x - x_i)$ $(i = \overline{1,n})$

$\Rightarrow S_i(x_i) = a_i$, $S_i'(x_i) = b_i$; $S_i''(x_i) = c_i$ $\Rightarrow$ из 3) $a_i = f(x_i) = f_i$, $i = \overline{1,n}$

$S_i(x_{i-1}) = f_{i-1} \Rightarrow f_i + b_i(x_{i-1} - x_i) + \frac{c_i}{2}(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x_{i-1} - x_i)^3 = f_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow$ (переименуем) $b_i h_i - \frac{c_i}{2} h_i^2 + \frac{d_i}{6} h_i^3 = f_i - f_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$ (*)

Из 2) в узлах x_i: $S_i'(x_{i-1}) = S_{i-1}'(x_{i-1}) = b_{i-1}$, $i = \overline{2,n}$

$\Rightarrow c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1}$, $i = \overline{2,n}$ (**)

Аналогично для $S''(x)$: $S_i''(x_{i-1}) = S_{i-1}''(x_{i-1}) = c_{i-1}$, $i = \overline{2,n}$

$\Rightarrow d_i h_i = c_i - c_{i-1}$, $i = \overline{2,n}$ (***)

Из 4) $\Rightarrow \begin{cases} S_1''(x_0) = S_1''(a) = c_1 - d_1 h_1 = 0 \\ S_n''(x_n) = S_n''(b) = c_n = 0 \end{cases}$ (****)

$\Rightarrow$ Из (*), (**), (***) и (****) получили замкнутую систему из $3n$ линейных уравнений с $3n$ неизвестными: b_i, c_i, d_i, $i = \overline{1,n}$

<u>Редукция системы</u>

Положим $c_0 = 0$ и перепишем (***): $d_i h_i = c_i - c_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$, $c_0 = 0$, $c_n = 0$

Откуда выразим d_i через $(c_i - c_{i-1})$. ~~Через~~ Из (*) выразим b_i через c_i и c_{i-1}, подставим в (**):

$$\frac{1}{3} c_{i-2} h_{i-1} + \frac{2}{3} c_{i-1}(h_{i-1} + h_i) + \frac{1}{3} c_i h_i = 2\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \ i = \overline{2,n}$$

Кроме того, $c_0 = c_n = 0$. $\Rightarrow (n-1)$ ур-ние с $(n-1)$ неизв.

Имеет диаг. преобладание $\Rightarrow \exists!$ решение. <u>чтд</u>.

Пусть $h = \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$

<u>Теорема</u> Пусть $f(x) \in C[a;b]$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall$ сетки $h < \delta \Rightarrow |f(x) - S(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in [a;b]$

<u>Теорема</u> Пусть $f(x) \in C^{(4)}[a;b]$ и $f''(a) = f''(b) \Rightarrow$

$|f(x) - S(x)| \le M_4 h^4$

$|f'(x) - S'(x)| \le M_4 h^3$ $\forall x \in [a;b]$, где $M_4 = \max\limits_{[a;b]} |f^{(4)}(x)|$

$|f''(x) - S''(x)| \le M_4 h^2$

Метод наименьших квадратов

1) Число точек x_i достаточно большое

2) Значение ф-ции y_i в точках x_i определяется приближенно.

Нецелесообразно добиваться равенства в y_i.

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x), \quad m < n$$

Пусть как-то выбрали a_k. Тогда в $\forall$ т. x_i:

$$\delta_i = y_i - F(x_i) = y_i - \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x_i), \quad i = \overline{0,n}$$

$$J = \sum_{i=0}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x_i)\right)^2$$ – суммарная квадратич. погрешность.

Задача: найти такой набор коэффициентов a_k, при котором суммарная кв. погрешность J оказывается минимальной.

$$\frac{\partial J}{\partial a_l} = -2 \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x_i)\right)\varphi_l(x_i) = 0, \quad l = \overline{0,m}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m} \gamma_{lk} a_k = b_l, \quad l = \overline{0,m}, \quad \text{где } \gamma_{lk} = \sum_{i=0}^{n} \varphi_l(x_i)\varphi_k(x_i), \quad (*)\ (**)$$

$$b_l = \sum_{i=0}^{n} \varphi_l(x_i)\, y_i$$

В (*) $(m+1)$ неизв. и уравнений.

(**) – матрица Грамма для системы $\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$ на сетке.

$\Rightarrow \gamma_{kl} = \gamma_{lk}$

Пусть φ_i выбраны так, что $\Delta \neq 0$ (опр. матр Грамма)

$\Rightarrow \exists!$ решение $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$

$\forall$ другой набор $a_0, a_1, \dots, a_m$: $a_i = \bar{a}_i + \Delta a_i$

$$\delta_i^2 = \left\{ y_i - \sum_{k=0}^{m} (\bar{a}_k + \Delta a_k)\varphi_k(x_i)\right\}^2 = \left\{\left(y_i - \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k \varphi_k(x_i)\right) - \sum_{k=0}^{m} \Delta a_k \varphi_k(x_i)\right\}^2 =$$

$$= \left(y_i - \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k \varphi_k(x_i)\right)^2 - 2\left(y_i - \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k \varphi_k(x_i)\right)\left(\sum_{l=0}^{m} \Delta a_l \varphi_l(x_i)\right) +$$

$$+ \left(\sum_{k=0}^{m} \Delta a_k \varphi_k(x_i)\right)^2$$

Первое слагаемое $= J$. Второе:

$$-2\sum_{i=0}^{n} \left\{\left(y_i - \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k \varphi_k(x_i)\right)\left(\sum_{l=0}^{m} \Delta a_l \varphi_l(x_i)\right)\right\} = -2\sum_{l=0}^{m} \Delta a_l \left\{\sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_l(x_i) -\right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k \sum_{i=0}^{n} \varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i)\right\} = -2\sum_{l=0}^{m} \Delta a_l \left\{ b_l - \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k \gamma_{lk}\right\} = 0$$

$\Rightarrow J(\bar a_0+\Delta a_0,\dots,\bar a_m+\Delta a_m) = J(\bar a_0,\dots,\bar a_m) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m}\Delta a_k\varphi_k(x_i)\right)^2 > J(\bar a_0,\dots,\bar a_m)$

$\Rightarrow$ Действительно минимизируют

Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Сходимость квадратурных формул.

$I=\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) + R_n$; $\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = I$

Разобьем $[a;b]$ на n частей (равных), $h=\frac{b-a}{n}$ с точками $x_i = a+ih$, $0\le i\le n$; средние точки: $\xi_i = a+(i-\frac{1}{2})h$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $1\le i\le n$

Прямоугольников: $P_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Rightarrow I = P_n+\alpha_n$

Трапеций: На каждом сегменте $[x_{i-1},x_i]$ задается формулой:

$g_n(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}(x-x_{i-1})$, $x\in[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$

$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_n(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\{f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}(x-x_{i-1})\}dx = \frac{h}{2}(f(x_{i-1})+f(x_i))$

$T_n = \int_a^b g_n(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_n(x)dx = \frac{b-a}{n}\{\frac{1}{2}f(a) + f(x_1)+\dots+f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b)\}$

$I = T_n+\beta_n$

Симпсона: n - четное и сгруппируем отрезки парами $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$ что

Для каждого $[x_{2j-2},x_{2j}]$ построим интерполяционный многочлен в форме Лагранжа: $g_n(x) = f(x_{2j-2})\frac{(x-x_{2j-1})(x-x_{2j})}{2h^2} + f(x_{2j-1})\frac{(x-x_{2j-2})(x-x_{2j})}{(-h^2)} +$

$+ f(x_{2j})\frac{(x-x_{2j-2})(x-x_{2j-1})}{2h^2}$, $x\in[x_{2j-2},x_{2j}]$, $1\le j\le n/2$

$\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} g_n(x)dx = \frac{h}{3}\{f(x_{2j-2})+4f(x_{2j-1})+f(x_{2j})\}$, $h=\frac{b-a}{n}$

$S_n = \int_a^b g_n(x)dx = \sum_{j=1}^{n/2}\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} g_n(x)dx = \frac{b-a}{3n}\{f(a)+4f(x_1)+2f(x_2)+\dots+2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1})+f(b)\}$

$I = S_n+\delta_n$

Заметим, что $S_n = \frac{4}{3}T_n - \frac{1}{3}T_{n/2}$

Сходимость: Пусть $f\in C^2$. Из матем. анализа:

$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = f(\xi_i)h + \frac{h^3}{24}f''(\eta_i^*)$, $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}h - \frac{h^3}{12}f''(\eta_i^{**})$

где η_i^* и η_i^{**} - некоторые т. $[x_{i-1},x_i]$

$\Rightarrow \alpha_n = \frac{h^3}{24}\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^*)$, $\beta_n = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^{**})$

Рассмотрим $h\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^*)$ и $h\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^{**})$ как инт. суммы:

$\lim_{n\to\infty} h\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^*) = \int_a^b f''(x)dx = f'(b) - f'(a)$

$\lim_{n\to\infty} h\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^{**}) = \int_a^b f''(x)dx = f'(b) - f'(a)$

$\Rightarrow \alpha_n = \frac{1}{n^2}(A + \mu_n)$, $\beta_n = \frac{1}{n^2}(B + \nu_n)$, где

$A = \frac{(b-a)^2}{24}\{f'(b) - f'(a)\}$, $\mu_n = \frac{(b-a)^2}{24}\{h\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^*) - \int_a^b f''(x)dx\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$B = -\frac{(b-a)^2}{12}\{f'(b) - f'(a)\}$, $\nu_n = -\frac{(b-a)^2}{12}\{h\sum_{i=1}^{n} f''(\eta_i^{**}) - \int_a^b f''(x)dx\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \alpha_n \approx A/n^2$; $\beta_n \approx \frac{B}{n^2}$

Или $\alpha_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta^*)$, $a \le \eta^* \le b$

$\beta_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta^{**})$, $a \le \eta^{**} \le b$

Если известно, что $|f''(x)| \le M_2$, $a \le x \le b$, то неравенство.

$\Rightarrow$ ~~Скорость $O(n^2)$~~ ~~Точность~~ Скорость $O(n^2)$

<u>Лемма</u> Если $\varphi(x) \in C[a;b]$ и $x_1, \dots, x_n$ – т. из $[a;b]$. Тогда $\exists \eta \in [a;b]$:

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) = \varphi(\eta)$

Симпсона: $\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_{2j-2} + 4f_{2j-1} + f_{2j}) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_j)$

$\gamma_n = \frac{1}{n^4}(C + \sigma_n)$, где $C = -\frac{(b-a)^4}{180}(f'''(b) - f'''(a))$

$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, или $\gamma_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\eta^{***})$ | $\sigma_n = -\frac{(b-a)^4}{180}\{2h\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\eta_j) - \int_a^b f^{(4)}(x)dx\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>Апостериорная оценка погрешности и повышение точности квадратурных формул по результатам расчетов на сетках с разными шагами</u>

Будто нашли для $\frac{n}{2}$ точек, потом для n точек.

$I = P_{\frac{n}{2}} + \frac{4}{n^2}(A + \mu_{\frac{n}{2}})$; $I = P_n + \frac{1}{n^2}(A + \mu_n)$; Вычтем

$(P_{\frac{n}{2}} - P_n) + \frac{3}{n^2}A + \frac{1}{n^2}(4\mu_{\frac{n}{2}} - \mu_n) = 0 \Rightarrow$

$\alpha_n = \frac{1}{n^2}(A + \mu_n) = \underbrace{\frac{1}{3}(P_n - P_{\frac{n}{2}})}_{\text{вычислим}} + \underbrace{\frac{4}{3n^2}(\mu_n - \mu_{\frac{n}{2}})}_{\text{пренебрег.}}$

$\Rightarrow \alpha_n \approx \frac{1}{3}(P_n - P_{\frac{n}{2}})$

Аналогично, $\beta_n = \frac{1}{3}(T_n - T_{\frac{n}{2}}) + \frac{4}{3n^2}(\nu_n - \nu_{\frac{n}{2}}) \approx \frac{1}{3}(T_n - T_{\frac{n}{2}})$

Для Симпсона: $I = S_{\frac{n}{2}} + \frac{16}{n^4}(C + \sigma_{\frac{n}{2}})$; $I = S_n + \frac{1}{n^4}(C + \sigma_n)$

(n кратно 4) $\gamma_n = \frac{1}{n^4}(C + \sigma_n) = \frac{1}{15}(S_n - S_{\frac{n}{2}}) + \frac{16}{15n^4}(\sigma_n - \sigma_{\frac{n}{2}}) \approx \frac{1}{15}(S_n - S_{\frac{n}{2}})$

Отметим, что можно подставить:

$$I = \frac{4}{3}P_n - \frac{1}{3}P_{\frac{n}{2}} + \hat{\alpha}_n \quad ; \quad I = \frac{4}{3}T_n - \frac{1}{3}T_{\frac{n}{2}} + \hat{\beta}_n ; \quad I = \frac{16}{15}S_n - \frac{1}{15}S_{\frac{n}{2}} + \hat{\gamma}_n$$

$$\hat{\alpha}_n = \frac{4}{3n^2}(\mu_n - \mu_{\frac{n}{2}}) = O(n^{-2}) ; \quad \hat{\beta}_n = \frac{4}{3n^2}(\partial_n - \partial_{\frac{n}{2}}) = O(n^{-2}) ; \quad \hat{\gamma}_n = \frac{16}{15n^4}(\sigma_n - \sigma_{\frac{n}{2}}) = O(n^{-4})$$

Задача построения квадратурной формулы, точной на полиномах.

Квадратурная формула Гаусса.

Задача: построить квадратурную формулу с числом узлов n, которая является точной для $\forall$ полинома степени $(2n-1)$ или ниже.

Пусть интеграл заранее приведён к стандартной форме:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) + \sigma_n , \text{ где } x_i \in [-1, 1]$$?

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} x^m dx = \frac{1}{m+1}\{1 + (-1)^m\} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^m , \quad 0 \le m \le 2n-1$$

Это система из $2n$ нелинейных уравнений с $2n$ неизвестными (x_i и c_i). При $m = 0$: $\sum_{i=1}^{n} c_i = 2$

Полином Лежандра: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$

$P_0(x) = 1$; $P_1(x) = x$; $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$; $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

Свойства: 1) $P_n(x)$ является полиномом степени n, обладает той же четностью, что и n: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

2) $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$

3) $P_n(x)$ на $(-1; 1)$ имеет n простых корней, которые, в силу св. 1, располагаются симметрично отн. $x = 0$.

4) $\forall$ полином $Q_m(x)$ ст. $m < n$ ортогонален к полиному Лежандра:

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x) P_n(x) dx = 0$$

Доказательство: 1) очевидно из формулы $P_n(x)$

2) $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}((x-1)^n (x+1)^n)^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \underbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-1)^{n-k}}_{((x-1)^n)^{(k)}} \cdot$

$\underbrace{\cdot\, n(n-1)\ldots(k+1)(x+1)^k}_{((x+1)^n)^{(n-k)}}$

$P_n(1) = \left| (x-1)^{n-k} \cdot \begin{cases}0, & n\neq k\\ 1, & n=k\end{cases}\right| = \frac{1}{2^n n!} C_n^n n! \cdot 2^n = 1$

$P_n(-1)$ из св-ва 1)

3) Рассмотрим $f_n(x) = (x^2-1)^n$

по теореме Ролля $f_n'(x)=0$ при $x\in(-1,1)$ и $x=\pm1$

Через n шагов получим n различных корней (различн.)

4) $m<n$

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \underbrace{Q_m(x)}_{u} \frac{((x^2-1)^n)^{(n)}}{dv}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\Big[\underbrace{Q_m(x)\left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)}\Big|_{1}^{-1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} Q_m'(x)\left((x^2-1)^n\right)^{(n-1)}dx\Big] =$$

$$= \dots = (-1)^{m+1}\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \underbrace{Q_m^{(m+1)}(x)}_{=0}\left((x^2-1)^n\right)^{(n-m+1)}dx = 0, \text{ чтд}$$

Пусть $\omega_n(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$

Возьмем произвол. $Q_m(x)$ ст. $m<n$.

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{\omega_n(x)\, Q_m(x)}_{\text{ст. } m+n\le 2n-1}dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{\omega_n(x_i)}_{=0} Q_m(x_i) + \underbrace{\delta_n}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow \omega_n(x) = A_n P_n(x)$, узлы кв. форм. Гаусса совпадают с корнями полин Лежандра

Введем $Q_{n-1,m}(x) = \dfrac{(x-x_1)\dots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\dots(x-x_n)}{(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\dots(x_m-x_n)}$

$$Q_{n-1,m}(x_i) = \begin{cases}0, & i\neq m\\ 1, & i=m\end{cases}$$

Для него должна быть точной $\Rightarrow$

$$\int_{-1}^{1} Q_{n-1,m}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i Q_{n-1,m}(x_i) = c_m$$

$$\Rightarrow c_m = \int_{-1}^{1} Q_{n-1,m}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\dots(x-x_n)}{(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\dots(x_m-x_n)}\,dx$$

$Q_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} Q_{n-1}(x_k)\cdot Q_{n-1,k}(x)$ по пред. в ЛТ.

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} Q_{n-1}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} Q_{n-1}(x_i)\underbrace{\int_{-1}^{1} Q_{n-1,k}(x)\,dx}_{c_i}$

$Q_{2n-1}(x) = P_n(x)q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)$

$\int_{-1}^{1} Q_{2n-1}(x) = \int_{-1}^{1} r_{n-1}(x)\,dx = \sum_i c_i r_{n-1}(x_i) = \sum_i c_i Q_{2n-1}(x_i)$

Разностные аппроксимации производных. Метод Эйлера численного решения ОДУ

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $x_{i+1}-x_i = h = \frac{b-a}{n}$, $0\le i\le n-1$

Будем пользоваться нормой: $\|y\|_c = \max\limits_{0\le i\le n}|y_i|$

Разностные аппроксимации первой производной:

$L_h^+[y_i] = \frac{y_{i+1}-y_i}{h}$, $0 \le i \le n-1$ — правая разностная производная

$L_h^-[y_i] = \frac{y_i-y_{i-1}}{h}$, $1 \le i \le n$ — левая разностная производная

$L_h^{(0)}[y_i] = \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$, $1 \le i \le n-1$ — центральная разностная производная

Введем погрешности аппроксимации производной:

$\psi_i^+ = L_h^+[y_i] - y'(x_i)$, $0 \le i \le n-1$

$\psi_i^- = L_h^-(y_i) - y'(x_i)$, $1 \le i \le n$

$\psi_i^{(0)} = L_h^{(0)}(y_i) - y'(x_i)$, $1 \le i \le n-1$

Пусть $y(x) \in C^2$. Запишем ф-лу Тейлора с ост. чл. в форме Лагранжа:

$y_{i+1} = y(x_i+h) = y_i + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i+\theta_i h)h^2$, где $\theta_i \in [0;1]$

Подставляя, получаем: $\psi_i^+ = \frac{1}{2}y''(x_i+\theta_i h)h$; $\psi_i^- = -\frac{1}{2}y''(x_i-\theta_i h)h$

$|y''(x)| \le M_2$, $a \le x \le b$. $\Rightarrow |\psi_i^+|, |\psi_i^-| \le \frac{1}{2}M_2 h$

Пусть $y(x) \in C^3$. Тогда $y_{i+1} = y_i + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}y'''(x_i+\theta_i h)h^3$

$y_{i-1} = y_i - y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 - \frac{1}{6}y'''(x_i-\theta_{2i}h)h^3$

Подставляя, получаем: $\psi_i^{(0)} = \frac{1}{6}\{y'''(x_i+\theta_{1i}h) + y'''(x_i-\theta_{2i}h)\}h^2$

$|y'''(x)| \le M_3$, $a \le x \le b \Rightarrow |\psi_i^{(0)}| \le \frac{1}{3}M_3 h^2$

Разностная аппроксимация второй производной:

$$L_h[y_i] = \frac{\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h}}{h} = \frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}$$

Пусть $y(x) \in C^4$. $\psi_i = L_h[y_i] - y''(x_i)$, $1 \le i \le n-1$

$y_{i+1} = y_i + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}y'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24}y^{(4)}(x_i+\theta_{1i}h)h^4$

$y_{i-1} = y_i - y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 - \frac{1}{6}y'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24}y^{(4)}(x_i-\theta_{2i}h)h^4$

Подставим: $\psi_i = \frac{1}{24}\{y^{(4)}(x_i+\theta_{1i}h) + y^{(4)}(x_i-\theta_{2i}h)\}h^2$

$|y^{(4)}(x)| \le M_4$, $a \le x \le b$, $\Rightarrow |\psi_i| \le \frac{1}{12}M_4 h^2$

Метод Эйлера. Задача Коши:

$\begin{cases} u' = f(x,u), \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$ $f(x,u) \in C$, удовл. условию Липшица по u в некоторой окрест. т. (x_0, u_0) $\Rightarrow \exists\, [a;b] \ni x_0$: $\exists!$ решение в $[a;b]$.

Пусть нужно построить решение на $[x_0, x_0+l]$

$x_i = x_0 + ih$, $0 \le i \le n$, где $h = \frac{l}{n}$.

Сопоставим исходной задаче разностную: // значения правой разн. в начале.

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}-y_i}{h} = f(x_i, y_i), \ 0 \le i \le n-1 \\ y_0 = u_0 \end{cases} \quad (*)$$

$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$, $0 \le i \le n-1$, что позволяет последовательно рассчитать все значения сеточной функции $\{y_i\}$.

<u>Точность</u>: Образуем 2 сеточные функции:

$z_i = y_i - u_i$, $0 \le i \le n$; $\quad \psi_i = \frac{u_{i+1}-u_i}{h} - f(x_i, u_i)$, $0 \le i \le n-1$

погрешность решения ; погрешность аппроксимации уравнения на решении

$y_i = u_i + z_i \Rightarrow$ подставим в $(*)$:

$$\frac{z_{i+1}-z_i}{h} + \frac{u_{i+1}-u_i}{h} = f(x_i, u_i+z_i) \Rightarrow \frac{z_{i+1}-z_i}{h} = \{f(x_i, u_i+z_i) - f(x_i, u_i)\} - \left\{\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - f(x_i, u_i)\right\}$$

$$f(x_i, u_i+z_i) - f(x_i, u_i) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i+\theta_i z_i) z_i \quad \text{(т. Лагранжа)}$$

$$\Rightarrow z_{i+1} = \left\{1 + h\frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i+\theta_i z_i)\right\} z_i - \psi_i h, \ 0 \le i \le n-1 \quad (**)$$

Дополним $z_0 = 0$.

Предположим, что $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)$ ограничена: $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\right| \le C$

$\Rightarrow \left|1 + h\frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i+\theta_i z_i)\right| \le 1 + Ch < e^{ch} = q$, $q > 1$

Из $(**)$ $\Rightarrow |z_{i+1}| \le q|z_i| + \|\psi_c\| h$

Порождаем цепочку оценок: $z_0 = 0$

$|z_1| \le \|\psi\|_c h$

$|z_2| \le (1+q)\|\psi\|_c h$

...

$|z_n| \le (1+q+\ldots+q^{n-1})\|\psi\|_c h$

Т.к. $q > 1$, то:

$1 + q + \ldots + q^{n-1} < nq^n = ne^{Chn}$

$\Rightarrow |z_i| \le nhe^{Chn}\|\psi\|_c$, $0 \le i \le n$

$\Rightarrow \|z\|_c \le le^{Cl}\|\psi\|_c$, $l - h \cdot n$

Оценим теперь $\|\psi\|_c$. Пусть $f(x,u)$ имеет непрерывн. ор. ЧП.

$$\Rightarrow u''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) + \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) f(x,u)$$

$$u_{i+1} = u_i + u_i'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i+\theta_i h)h^2$$

Подставляем в опред. ψ_i: $\quad \psi_i = \frac{1}{2}u''(x_i+\theta_i h)h$

$|u''(x)| \le M_2$, $x_0 \le x \le x_0 + l \quad \Rightarrow \|\psi\|_c \le \frac{M_2}{2}h$; $\quad \|z\|_c \le \frac{M_2}{2}le^{Cl}h$

Методы Рунге-Кутта численного решения ОДУ

Положим: $f(x_i;y_i) + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_i;y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i;y_i) f(x_i;y_i)\right\}h =$

$= \beta f(x_i;y_i) + \alpha f(x_i + \gamma h, y_i + \delta h) + O(h^2)$

$\left| \frac{y_{i+1}-y_i}{h} = f(x_i;y_i) + \frac{1}{2}(\text{—}) \right)$

$f(x_i+\gamma h, y_i+\delta h) = f(x_i;y_i) + \left\{\gamma \frac{\partial f}{\partial x}(x_i;y_i) + \delta \frac{\partial f}{\partial y}(x_i;y_i)\right\}h + O(h^2)$

Подставим и приравняем слева и справа члены, не содержащие h и содержащие h в первой степени. Получим:

$\alpha+\beta=1$; $\alpha\gamma = \frac{1}{2}$; $\alpha\delta = \frac{1}{2} f(x_i;y_i)$, откуда

$\beta = 1-\alpha$; $\gamma = \frac{1}{2\alpha}$; $\delta = \frac{1}{2\alpha} f(x_i;y_i)$

Однопараметрич. семейство разностн. схем Рунге-Кутта:

$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = (1-\alpha) f(x_i;y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha} \cdot f(x_i;y_i)\right)$ (**)

$\alpha = \frac{1}{2}$: (предиктор-корректор):

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\{f(x_i;y_i) + f(x_i+h, y_i + h f(x_i;y_i))\}$

Вычисляем $\tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i;y_i)$ (грубое предсказание)

Подставление $\tilde{y}_{i+1}$ и вычисление y_{i+1} - коррекция

$\alpha = 1$: $y_{i+1} = y_i + f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i;y_i)\right)h$

$\tilde{y}_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i;y_i)$, затем f в т. $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$

$\psi_i = \frac{u_{i+1}-u_i}{h} - \left[(1-\alpha) f(x_i, u_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, \psi_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)\right)\right]$ (*)

Имеем: $\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = f(x_i;y_i) + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_i;y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i;y_i) f(x_i;y_i)\right\}h$

подставим $y_i = z_i + u_i$ (**)

$\frac{z_{i+1}-z_i}{h} + \frac{u_{i+1}-u_i}{h} = (1-\alpha) f(x_i, u_i+z_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i+z_i+\frac{h}{2\alpha} \cdot f(x_i, u_i+z_i)\right) \Rightarrow$

$\frac{z_{i+1}-z_i}{h} = \left\{\left[(1-\alpha) f(x_i, u_i+z_i) + \alpha f\left(x_i+\frac{h}{2\alpha}, u_i+z_i+\frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i+z_i)\right)\right] - \left[(1-\alpha) f(x_i, u_i) + \right.\right.$

$\left.\left. + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)\right)\right]\right\} - \left\{\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - \left[(1-\alpha) f(x_i, u_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)\right)\right]\right\}$

Рассмотрим функцию $F(v) = (1-\alpha) f(x_i, v) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, v + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, v)\right)$

В первой формуле сводке: $F(u_i+z_i) - F(u_i) = F'(u_i + \theta_i z_i) z_i$, $0 < \theta_i < 1$

$F'(v) = (1-\alpha)\frac{\partial f}{\partial v}(x_i, v) + \alpha \frac{\partial f}{\partial v}\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, v + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, v)\right)\left(1 + \frac{h}{2\alpha}\frac{\partial f}{\partial v}(x_i, v)\right)$

Получаем: $z_{i+1} = \{1 + hF'(u_i + \theta_i z_i)\} z_i - \psi_i h$, $0 \le i \le n-1$

Дополним $z_0 = 0$.

Пусть $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)$ ограничена. Тогда:

$|1+hF'(u_i+\theta_i z_i)| \le 1+Ch+\frac{1}{2}C^2h^2 < e^{Ch} = q,\ q>1$

$\Rightarrow |z_{i+1}| \le q|z_i| + \|\psi\|_c h \ \rightarrow$ из прошлого билета:

$\|z\|_c \le \ell e^{c\ell}\|\psi\|_c$

Пусть $f(x,u)$ имеет непрерывные ∂ производные:

$u_{i+1} = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}u'''(\bar{x}_i)h^3$

$f(x_i+\frac{h}{2\alpha}, u_i+\frac{h}{2\alpha}f(x_i,u_i)) = f(x_i,u_i) + \frac{h}{2\alpha}\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,u_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_i,u_i)f(x_i,u_i)\} +$

$+\frac{h^2}{8\alpha^2}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}(\hat{x}_i,\hat{u}_i)f(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\hat{x}_i,\hat{u}_i)f^2(\hat{x}_i,\hat{u}_i)\}$, где

$\bar{x}_i = x_i + \bar{\theta}_i h,\ \hat{x}_i = x_i + \hat{\theta}_i\frac{h}{2\alpha},\ \hat{u}_i = u_i + \hat{\theta}_i\frac{h}{2\alpha}f(x_i,u_i),\ 0<\hat{\theta}_i,\bar{\theta}_i<1.$

Подставляем все это в (*) и т.к. $u'(x_i) = f(x_i,u_i)$ и

$u''(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x}(u_i,x_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_i,u_i)f(x_i,u_i)$, получаем:

$\psi_i = h^2\{\frac{1}{6}u'''(\bar{x}_i) - \frac{1}{8\alpha}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}(\hat{x}_i,\hat{u}_i)f(\hat{x}_i,\hat{u}_i) +$

$+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\hat{x}_i,\hat{u}_i)f^2(\hat{x}_i,\hat{u}_i)]\}$

Из ограниченности $\Rightarrow |\psi_i| \le \|\psi\|_c \le Mh^2$

Откуда $\|z\|_c \le M\ell e^{c\ell}h^2$

Часто используют метод Рунге-Кутта 4 порядка точности:

$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$, где

$k_1 = f(x_i,y_i);\ k_2 = f(x_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{h}{2}k_1);\ k_3 = f(x_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{h}{2}k_2);$

$k_4 = f(x_i+h, y_i+hk_3)$

Методы Адамса численного решения ОДУ

Пусть $u(x)$ - решение $u' = f(x,u)$

$\Rightarrow u'(x) = f(x,u(x)) = F(x)$

Интегрируя между двумя точками сетки, получаем:

$u_{i+1} = u_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)dx$

Но $F(x)$ нам неизвестна. Заменим ее на известную.

Пусть мы довели расчет до точки x_i => нам стали известны y_j и $f(x_j, y_j)$, $0 \le j \le i$. Возьмем некоторое фиксированное целое число $m \le i$ и построим интерполяционный многочлен m-й степени, принимающий в точках x_j, $i-m \le j \le i$ значения $f(x_j, u_j)$: $P_m(x_j) = f(x_j, u_j)$, $i-m \le j \le i$

$$P_m(x) = \sum_{j=i-m}^{i} f(x_j, y_j)\, Q_{mj}(x), \text{ где}$$

$$Q_{mj}(x) = \frac{(x-x_{i-m})\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_i)}{(x_j-x_{i-m})\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_i)}.$$ Приходим к:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_m(x)\,dx = y_i + \sum_{j=i-m}^{i} a_j f(x_j, y_j), \text{ где } a_j = \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_{mj}(x)\,dx$$

$m=0$: $F(x) \approx P_0 = f(x_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$ (метод Эйлера)

$m=1$ $P_1(x) = f(x_i, y_i)\dfrac{x-x_{i-1}}{h} - f(x_{i-1}, y_{i-1})\dfrac{x-x_i}{h} \Rightarrow$ подставляем

$$y_{i+1} = y_i + \left\{\tfrac{3}{2} f(x_i, y_i) - \tfrac{1}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1})\right\} h$$

Перепишем в виде разностного уравнения:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{3}{2} f(x_i, y_i) - \frac{1}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$\psi_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \left\{\tfrac{3}{2} f(x_i, u_i) - \tfrac{1}{2} f(x_{i-1}, u_{i-1})\right\} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \left\{\tfrac{3}{2} u'(x_i) - \tfrac{1}{2} u'(x_{i-1})\right\}$$

$$u_{i+1} = u_i + u'(x_i) h + \tfrac{1}{2} u''(x_i) h^2 + \tfrac{1}{6} u'''(x_i + \tilde{\theta}_i h) h^3$$

$$u'(x_{i-1}) = u'(x_i) - u''(x_i) h + \tfrac{1}{2} u'''(x_i - \tilde{\tilde{\theta}}_i h) h^2$$

Подставляем:

$$\psi_i = \left\{\tfrac{1}{6} u'''(x_i + \tilde{\theta}_i h) + \tfrac{1}{4} u'''(x_i - \tilde{\tilde{\theta}}_i h)\right\} h^2$$

$$\Rightarrow |\psi_i| \le \|\psi\|_c \le \tfrac{5}{12} M_3 h^2$$

Рассмотрим $m=3$ (и порядок точности):

$$y_{i+1} = y_i + h\left\{\tfrac{55}{24} f(x_i, y_i) - \tfrac{59}{24} f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \tfrac{37}{24} f(x_{i-2}, y_{i-2}) - \tfrac{9}{24} f(x_{i-3}, y_{i-3})\right\}$$

Постановка краевой задачи для линейного ОДУ 2 порядка. Разностная аппроксимация и метод численного решения. Оценка погрешности разностной схемы.

Задача: $u'' - q(x)u = -f(x)$, $a < x < b$

$$u(a) = u_1, \quad u(b) = u_2$$

Пусть $f(x)$ и $q(x)$ непрерывны, и $q(x) \geq q_0 > 0$

Решение задачи, при предположениях, $\exists!$.

$h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $0 \leq i \leq n$

Заменим ур-ние его разностным аналогом.

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - q_i y_i = -f_i, \quad 1 \leq i \leq n-1 \qquad (*)$$

$y_0 = u_0$, $y_n = u_2$.

Перепишем: $y_{i-1} - (2 + q_i h^2) y_i + y_{i+1} = -f_i h^2$, $1 \leq i \leq n-1$

Система из $(n-1)$ ур-ний с $(n-1)$ неизвестными y_i. (y_0 и y_n известны)

Схема неявная (т.к. $\{y_i\}$ определяется из решения системы линейных алгебраических уравнений).

Получили трехдиаг. матрицу с диагональным преобладанием.

Погрешность: Пусть $u_i = u(x_i)$ - решение.

$z_i = y_i - u_i$, $0 \leq i \leq n$

$$\psi_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - q_i u_i + f_i, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Выразим y_i и подставим в $(*)$:

$$\frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{h^2} - q_i z_i = -\left\{\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - q_i u_i + f_i\right\} = -\psi_i, \quad 1 \leq i \leq n-1 \qquad (**)$$

$z_0 = z_n = 0$

Пусть max по модулю число z_i соответствует индексу j:

$\|z\|_c = |z_j| \geq |z_i|$, $0 \leq i \leq n$ $\quad (j \neq 0, j \neq n)$

Рассмотрим $(**)$ для этого индекса (j):

$(2+q_j h^2) z_j = z_{j-1} + z_{j+1} + \psi_j h^2$

$(2+q_j h^2)|z_j| = (2+q_j h^2)\|z\|_c \le |z_{i-1}| + |z_{j+1}| + |\psi_j| h^2 \le 2\|z\|_c + \|\psi\|_c h^2$

Откуда получаем: $\|z\|_c \le \frac{1}{q_0}\|\psi\|_c$

Пусть $f(x)$ и $q(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы на $[0;\ell]$

$u_{i-1} = u_i - u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 - \frac{1}{6}u'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(x_i - \hat{\theta}_i h)h^4$

$u_{i+1} = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}u'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(x_i + \hat{\hat{\theta}}_i h)h^4$

Подставляем в опр. ψ_i:

$$\psi_i = \underbrace{\{u''(x_i) - q_i u_i + f_i\}}_{=0} + \frac{h^2}{24}\{u^{(4)}(x_i - \hat{\theta}_i h) + u^{(4)}(x_i + \hat{\hat{\theta}}_i h)\}$$

$\Rightarrow \|\psi\|_c \le \frac{M_4}{12}h^2$, $\|z\|_c \le \frac{M_4}{12 q_0}h^2$

Система полиномов, ортогональных ~~на отрезке $[-1;1]$~~ на некотором множестве, определена однозначно с точностью до множителей.

Следствие. $\forall$ система полиномов, ортогональных на отрезке $[-1;1]$, совпадает с точностью до множителя с системой полиномов Лежандра.

$\forall Q_{n-1}(x)$: $\quad Q_{n-1}(x) = \sum_{m=1}^{n} Q_{n-1}(x_m)\, Q_{n-1,m}(x)$

Совпадают в n точках $\Rightarrow$ равны

$\int_{-1} Q_{n-1}(x) = \sum_{m=1}^{n} Q_{n-1}(x_m) \int_{-1} Q_{n-1,m}(x)dx = \sum_{m=1}^{n} c_m Q_{n-1}(x_m) \Rightarrow$ верно.

Рассмотрим $Q_{2n-1}(x)$: $\quad Q_{2n-1}(x) = P_n(x) q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)$

$\int_{-1}^{1} Q_{2n-1}(x) = \int_{-1}^{1}\{P_n(x)q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)\}dx = \int_{-1}^{1} r_{n-1}(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i r_{n-1}(x_i) =$

$= \sum_{i=1}^{n} c_i\{\underbrace{P_n(x_i)}_{=0} q_{n-1}(x_i) + r_{n-1}(x_i)\} = \sum_{i=1}^{n} c_i Q_{2n-1}(x_i)$

Если матрица симметричная $A = A^*$, то $\|A\| = \lambda_{max}$, $\|A^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda_{min}|}$

и $M_A = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$